

PENGEMBANGAN METODE INTERPOLASI SPLIN KUBIK TERAPIT DAN APLIKASINYA PADA MASALAH PELACAKAN TRAJEKTORI OBJEK

Elvathna Syafwan¹, Mahdhivan Syafwan*², Shandy Tresnawati³

^{1,3}Politeknik TEDC Bandung, Kota Cimahi

²Universitas Andalas, Kota Padang

Email: ¹elvathna@poltektedc.ac.id, ²mahdhivan@sci.unand.ac.id, ³shandy.tresnawati@poltektedc.ac.id

*Penulis Korespondensi

(Naskah masuk: 22 Januari 2021, diterima untuk diterbitkan: 14 Oktober 2022)

Abstrak

Interpolasi splin kubik merupakan sebuah metode pencocokan kurva yang sangat populer karena mudah diterapkan dan menghasilkan kurva yang mulus. Pada artikel ini dibahas pengembangan metode interpolasi splin kubik untuk syarat batas terapan yang diambil dari rumus eksplisit beda hingga dengan ketelitian orde lebih tinggi. Pengembangan metode ini diterapkan pada masalah pelacakan trajektori objek (*object tracking*). Secara khusus, masalah ini diujikan untuk splin kubik terapan orde dua, dan hasil interpolasinya dibandingkan dengan hasil pada splin kubik alami dan splin kubik terapan orde satu. Dari simulasi data trajektori yang dibangkitkan dari kurva spiral Archimedean, diperoleh nilai galat total untuk splin kubik alami, terapan orde satu dan terapan orde dua masing-masing sebagai berikut: $E_1^{\text{tot}} = 0,14290$, $E_2^{\text{tot}} = 0,22614$ dan $E_3^{\text{tot}} = 0,09007$. Berdasarkan hasil tersebut, disimpulkan bahwa interpolasi splin kubik terapan orde dua yang dikembangkan pada artikel ini dapat menghasilkan trajektori objek yang lebih akurat dibandingkan splin kubik alami dan splin kubik terapan orde satu.

Kata kunci: interpolasi splin kubik, syarat batas terapan, beda hingga, pelacakan trajektori objek

DEVELOPMENT OF A CLAMPED CUBIC SPLINE INTERPOLATION METHOD AND ITS APPLICATION IN OBJECT TRACKING PROBLEM

Abstract

Cubic spline interpolation is a very popular curve fitting method since it is easy to implement and produces a smooth curve. This article discusses the development of the cubic spline interpolation method for a clamped boundary condition taken from finite-difference explicit formulas with higher-order accuracy. The development of this method is applied to an object tracking problem. In particular, this problem is examined for second-order clamped cubic spline, and the interpolated results are compared with those for natural and first-order clamped cubic splines. From the simulation of trajectory data generated from the Archimedean spiral curve, the total error values for natural, first-order, and second-order clamped cubic splines are respectively $E_1^{\text{tot}} = 0.14290$, $E_2^{\text{tot}} = 0.22614$ and $E_3^{\text{tot}} = 0.09007$. Based on these results, it is concluded that the second-order clamped cubic spline interpolation developed in this article can produce a more accurate object trajectory than the natural and first-order clamped cubic splines.

Keywords: cubic spline interpolation, clamped boundary condition, finite difference, object tracking

1. PENDAHULUAN

Masalah pencocokan kurva (*curve fitting*) merupakan masalah umum yang sering ditemukan dalam pembuatan desain grafis, *computer vision*, dan hubungan antar variabel. Salah satu teknik pencocokan kurva dalam metode numerik adalah interpolasi (Chapra & Raymond, 2010). Kurva interpolasi dapat dibangun oleh suatu fungsi polinomial berorde rendah terhadap subkumpulan titik data. Interpolasi ini disebut interpolasi splin (Mathews & Fink, 2004). Splin terdiri dari tiga jenis,

yaitu splin linear, splin kuadrat, dan splin kubik. Dalam praktiknya, splin kubik sering dipakai karena memberikan aproksimasi yang lebih baik dan menghasilkan kurva yang lebih mulus (Anton & Rorres, 2013).

Interpolasi splin kubik terdiri dari beberapa jenis berdasarkan syarat batasnya (Anton & Rorres, 2013), yaitu splin kubik alami (*natural spline*), splin kubik berujung parabolik (*parabolic runout spline*), splin kubik berujung pangkat tiga (*cubic runout spline*), splin kubik periodik (*periodic spline*) dan splin kubik

terapi (*clamped spline*). Spline kubik terapi dinilai lebih akurat dibandingkan dengan jenis spline kubik lainnya (Anton & Rorres, 2013). Khusus untuk interpolasi spline kubik periodik dan terapi, review penjelasan teori matematikanya dapat dilihat masing-masing di (Amliza, Syafwan, & Bahri, 2021) dan (Amelia, Syafwan, & Putri, 2018).

Berbagai algoritma dan metode komputasi interpolasi spline kubik telah dikaji oleh berbagai peneliti, mulai dari pengembangan algoritma dasar (Dyer *dkk*, 2001) hingga komputasi cepat pada kasus 2-D (Wang, Hsieh, & Truong, 2004) serta komputasi efektif menggunakan FIR digital filter (Ferrer *dkk*, 2013) dan algoritma matriks tridiagonal (Syafwan *dkk*, 2020).

Interpolasi spline kubik telah diimplementasikan dalam berbagai aplikasi, seperti pada pelacakan trajektori suatu objek (*object tracking*) (Gu & Tjahjadi, 1999), orbit satelit (Chuanlong, 2017) dan sistem tenaga listrik (Prasad *dkk*, 2018). Khusus untuk *object tracking*, aplikasi spline kubik pada masalah ini sangat penting dalam mendapatkan trajektori, yaitu posisi suatu objek dalam koordinat bidang atau ruang di setiap satuan waktu.

Object tracking lebih lanjut dapat dimanfaatkan untuk membantu kelompok berkebutuhan khusus yang memerlukan sebuah perangkat pintar dalam memandu pergerakan mereka menuju ke suatu objek tertentu (Utaminigrum *dkk*, 2017). Dalam hal ini, trajektori suatu objek mungkin terputus atau tidak tersedia dalam suatu selang waktu yang disebabkan oleh keterbatasan kecepatan kamera video atau yang lebih sering terjadi karena adanya kasus *occlusion* antar objek, yaitu objek yang dideteksi tertutup sebagian atau seluruhnya oleh objek lain. Padahal pada kenyataannya posisi suatu objek yang dideteksi mengikuti suatu fungsi pergerakan yang kontinu. Jika keadaan *occlusion* ini terjadi pada perangkat pemandu, tentu akan membahayakan keselamatan kelompok berkebutuhan khusus.

Penggunaan interpolasi spline kubik untuk pelacakan trajektori dengan objek manusia telah dilakukan oleh Sampena (Sampena, 2011). Pada kajiannya tersebut, Sampena menerapkan spline kubik alami dan memperoleh hasil yang cukup akurat.

Dalam artikel ini akan dikaji pengembangan interpolasi spline kubik terapi dengan memodifikasi fungsi syarat batas sehingga diperoleh ketelitian yang lebih akurat. Dalam konteks aplikasi *object tracking*, akan dilihat apakah interpolasi spline kubik terapi yang dimodifikasi ini berkontribusi dalam menghasilkan trajektori objek yang lebih mendekati keadaan sesungguhnya. Hal ini tentu saja akan sangat bermanfaat, misalnya, dalam membantu kelompok berkebutuhan khusus dalam melakukan mobilitas yang aman dan nyaman.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian dalam artikel ini berbasis matematika empirik. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- (1) Mengembangkan kajian teori interpolasi spline kubik untuk jenis syarat batas terapi dengan memanfaatkan konsep aproksimasi beda hingga untuk ketelitian orde lebih tinggi (Khan & Ohba, 1999).
- (2) Menerapkan hasil pengembangan teori yang diperoleh pada langkah (1) untuk menyelesaikan masalah pelacakan trajektori objek (*object tracking*) melalui data simulasi.
- (3) Menganalisis dan membandingkan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah (2).

Berikut ditinjau kembali konsep matematis dari interpolasi spline kubik.

2.1 Teori Interpolasi Spline Kubik

Misalkan terdapat n titik data di bidang- xy ,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

yang nilai-nilainya diketahui. Titik-titik data ini diinterpolasi dengan menggunakan metode *spline kubik*, yaitu dengan membangun fungsi

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

dimana $p_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ adalah polinomial pangkat tiga yang didefinisikan oleh

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad (1)$$

yang terdefinisi di setiap interval $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, dengan a_j , b_j , c_j , dan d_j adalah koefisien yang nilai-nilainya akan dicari untuk menentukan $P(x)$. Perhatikan bahwa jarak antara dua titik data yang berdekatan pada koordinat- x dapat dinyatakan secara umum dengan $h_j = x_{j+1} - x_j$, dengan $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Fungsi $P(x)$ yang dibangun pada interpolasi spline kubik adalah fungsi yang memenuhi keempat sifat berikut:

- (1) $P(x)$ melalui seluruh titik data
- (2) $P(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$,
- (3) $P'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$
- (4) $P''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$

Dengan menggunakan keempat sifat di atas dapat diperoleh nilai-nilai untuk koefisien a_j , b_j , c_j , dan d_j pada persamaan (1), sebagaimana yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema Interpolasi Spline Kubik (Anton & Rorres, 2013).

Diberikan n titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. *Spline kubik*

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ p_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots \\ p_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

dengan

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

yang menginterpolasi titik-titik data yang diberikan, mempunyai koefisien-koefisien sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_j &= y_j, \\ b_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \left[\frac{P''(x_{j+1}) + 2P''(x_j)}{6} \right] h_j, \\ c_j &= \frac{P''(x_j)}{2}, \\ d_j &= \frac{P''(x_{j+1}) - P''(x_j)}{6h_j}, \end{aligned} \tag{2}$$

untuk $j = 1, 2, \dots, n - 1$

Dari teorema di atas dapat dilihat bahwa nilai koefisien b_j , c_j , dan d_j tergantung dari nilai-nilai $P''(x_1), P''(x_2), \dots, P''(x_n)$ yang belum diketahui. Oleh karena itu, nilai-nilai tersebut perlu dicari agar dapat ditentukan fungsi splin kubik $P(x)$.

Agar diperoleh solusi tunggal untuk $P''(x_1), P''(x_2), \dots, P''(x_n)$, maka diperlukan dua persamaan tambahan. Dua persamaan tambahan tersebut bergantung pada jenis splin kubik yang didefinisikan oleh syarat batasnya.

2.1 Jenis-Jenis Interpolasi Splin Kubik

Terdapat beberapa jenis interpolasi splin kubik yang ditentukan dari syarat batasnya (Anton & Rorres, 2013):

1. Splin alami (*natural spline*)
Interpolasi splin kubik alami memiliki fungsi polinomial orde tiga yang turunan keduanya sama dengan nol pada titik-titik ujungnya, yaitu $P''(x_1) = P''(x_n) = 0$.
2. Splin berujung parabolik (*parabolic runout spline*)
Interpolasi splin kubik berujung parabolik memiliki fungsi polinomial orde tiga yang tereduksi menjadi sebuah kurva parabolik pada interval-interval awal dan akhirnya, yaitu $P''(x_1) = P''(x_2)$ dan $P''(x_n) = P''(x_{n-1})$.
3. Splin berujung pangkat tiga (*cubic runout spline*)
Interpolasi splin kubik berujung pangkat tiga memiliki sebuah kurva pangkat tiga tunggal pada dua interval awal dan dua interval akhirnya, yaitu $P''(x_1) = 2P''(x_2) - P''(x_3)$, $P''(x_n) = 2P''(x_{n-1}) - P''(x_{n-2})$.
4. Splin kubik periodik (*periodic spline*)
Interpolasi splin kubik periodik memiliki syarat batas awal dan akhir yang sama, yaitu

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_n), \\ P'(x_1) &= P'(x_n), \\ P''(x_1) &= P''(x_n). \end{aligned}$$

5. Splin kubik terapit (*clamped spline*)

Interpolasi splin kubik terapit memiliki kemiringan di titik-titik ujung yang sudah diketahui. Splin kubik terapit dinilai lebih akurat dibandingkan dengan jenis splin kubik lainnya, yaitu

$$P'(x_1) = y'_1, \tag{3}$$

$$P'(x_n) = y'_n. \tag{4}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pengembangan Interpolasi Splin Kubik Terapit

Perhatikan kembali persamaan (3) dan (4). Karena y'_1 dan y'_n tidak diketahui nilainya, maka diperlukan taksiran terhadap kedua kuantitas tersebut. Nilai taksiran yang paling sederhana dan sering dipakai adalah aproksimasi beda hingga (*finite difference*) dengan ketelitian orde satu, yang diberikan oleh (Mathews & Fink, 2004) :

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1}, \tag{5}$$

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}. \tag{6}$$

Untuk meningkatkan keakuratan terhadap taksiran y'_1 dan y'_n , maka dapat digunakan aproksimasi beda hingga dengan orde ketelitian yang lebih tinggi. Khan dan Ohba (Khan & Ohba, 1999) berhasil menurunkan rumus eksplisit untuk turunan pertama dengan sebarang orde ketelitian m pada lebar selang seragam h , yang diberikan oleh

$$y'_1 = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^m g_k^F y_{k+1} + \alpha(h^m), \tag{7}$$

$$y'_n = \frac{1}{h} \sum_{k=-p}^0 g_k^B y_{k+n} + \alpha(h^m), \tag{8}$$

dimana

$$g_k^F = \begin{cases} -\sum_{j=1}^m \frac{1}{j}, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_k^m, & k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{9}$$

dan

$$g_k^B = \begin{cases} -g_0^F, & k = 0 \\ -g_k^F = \frac{-1^k}{k} C_k^p, & k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{10}$$

atau bisa dimodifikasi menjadi

$$g_{-1}^B = -p \tag{11}$$

$$g_{-k}^B = g_{-k+1}^B \frac{(k-1)(p-k+1)}{k^2}, \quad k = 2, 3, \dots, p.$$

Khusus untuk $m = 2$ (ketelitian orde 2) dan lebar selang seragam h , maka dari persamaan (7) dan (8) dengan menggunakan persamaan (9)-(11) diperoleh syarat batas yang baru sebagai berikut:

$$y_1' = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}y_1 + 2y_2 - \frac{1}{2}y_3 \right], \quad (12)$$

$$y_n' = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}y_{n-2} - 2y_{n-1} + \frac{3}{2}y_n \right]. \quad (13)$$

Dengan mengikuti kalkulasi seperti pada interpolasi splin kubik terapan orde satu (Amelia, Syafwan, & Putri, 2018), dapat ditunjukkan dengan mudah sistem persamaan berikut:

$$6[y_2 - y_1 - hy_1'] = h^2[2M_1 + M_2], \quad (14)$$

$$6[y_{n-1} - y_n + hy_n'] = h^2[2M_n + M_{n-1}], \quad (15)$$

dimana $M_1 = P''(x_1), M_2 = P''(x_2), \dots, M_n = P''(x_n)$.

Selanjutnya substitusi syarat batas (12) dan (13) masing-masing ke persamaan (14) dan (15) menghasilkan

$$6 \left[\frac{1}{2}y_3 - y_2 + \frac{1}{2}y_1 \right] = h^2[2M_1 + M_2], \quad (16)$$

$$6 \left[\frac{1}{2}y_n - y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} \right] = h^2[2M_n + M_{n-1}]. \quad (17)$$

Dari sifat (4) pada fungsi splin kubik dan dengan menambahkan dua syarat batas (16) dan (17), dapat dibuat hubungan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 6 \left[\frac{1}{2}y_3 - y_2 + \frac{1}{2}y_1 \right] &= 2h^2M_1 + h^2M_2 \\ 6[y_3 - 2y_2 + y_1] &= h^2M_1 + 4h^2M_2 + h^2M_3 \\ 6[y_4 - 2y_3 + y_2] &= h^2M_2 + 4h^2M_3 + h^2M_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$6[y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3}] = h^2M_{n-3} + 4h^2M_{n-2} + h^2M_{n-1}$$

$$6[y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}] = h^2M_{n-2} + 4h^2M_{n-1} + h^2M_n$$

$$6 \left[\frac{1}{2}y_n - y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} \right] = 2h^2M_n + h^2M_{n-1}$$

atau dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$H_{n \times n} \mathbf{m}_{n \times 1} = 6\mathbf{k}_{n \times 1} \quad (18)$$

dimana

$$H = \begin{bmatrix} 2h^2 & h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 4h^2 & h^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 4h^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4h^2 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h^2 & 4h^2 & h^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h^2 & 2h^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_3 - y_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3} \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \\ \frac{1}{2}y_n - y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Jika matriks H invertible, maka diperoleh solusi tunggal $\mathbf{m} = 6H^{-1}\mathbf{k}$.

3.2 Aplikasi Pada Masalah Pelacakan Trajektori Objek

Masalah pelacakan trajektori suatu objek (*object tracking*) adalah salah satu masalah pada bidang *computer vision* yang bertujuan untuk mendapatkan trajektori utuh suatu objek, yaitu posisi objek dalam koordinat bidang atau ruang di setiap satuan waktu. Dalam masalah ini, trajektori suatu objek mungkin terputus atau tidak tersedia dalam suatu selang waktu yang disebabkan oleh keterbatasan kecepatan kamera video atau yang lebih sering terjadi karena adanya kasus *occlusion* antar objek, yaitu objek yang dideteksi tertutup sebagian atau seluruhnya oleh objek lain. Padahal pada kenyataannya posisi suatu objek yang dideteksi mengikuti suatu fungsi pergerakan yang kontinu. Sebagai ilustrasi, pada Gambar 1 diberikan contoh trajektori dengan objek manusia.



Gambar 1. Ilustrasi trajektori manusia (Sampena, 2011)

Untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas, metode interpolasi splin kubik dapat digunakan untuk memperkirakan posisi suatu objek selama selang waktu yang tidak diketahui. Dengan menggunakan pengembangan interpolasi splin kubik terapan yang dimodifikasi dari fungsi syarat batasnya, diharapkan dapat diperoleh hasil interpolasi dengan ketelitian yang lebih akurat. Dalam konteks aplikasi *object tracking*, interpolasi splin kubik terapan yang dimodifikasi ini akan menghasilkan trajektori objek yang lebih mendekati trajektori aslinya.

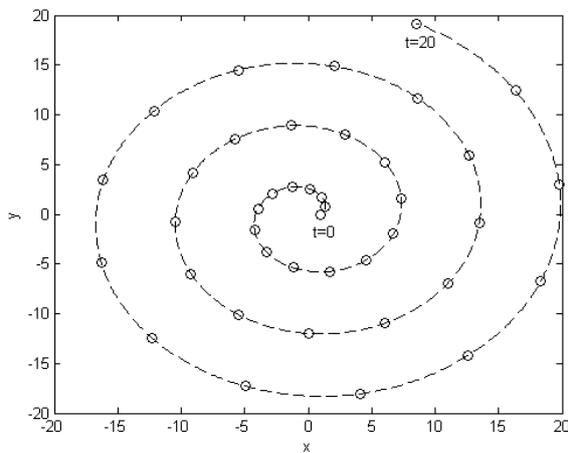
Selama ini kemiringan di titik-titik ujung splin kubik terapan diaproksimasi oleh rumus beda hingga orde 1 (selanjutnya disebut splin kubik terapan orde 1). Pada masalah pelacakan trajektori objek ini akan digunakan splin kubik terapan dengan kemiringan di titik-titik ujungnya diaproksimasi oleh beda hingga orde 2 (selanjutnya disebut splin kubik terapan orde 2), sebagaimana yang sudah dibahas pada Bagian 3.

Sebagai ilustrasi, pandang sebuah trajektori suatu objek dalam bidang- xy yang dibangkitkan dari kurva spiral Archimedean dengan komponen x dan y masing-masing berupa fungsi terhadap waktu $t \in [0, T]$ sebagai berikut:

$$x(t) = (a + bt) \cos(t), \tag{19}$$

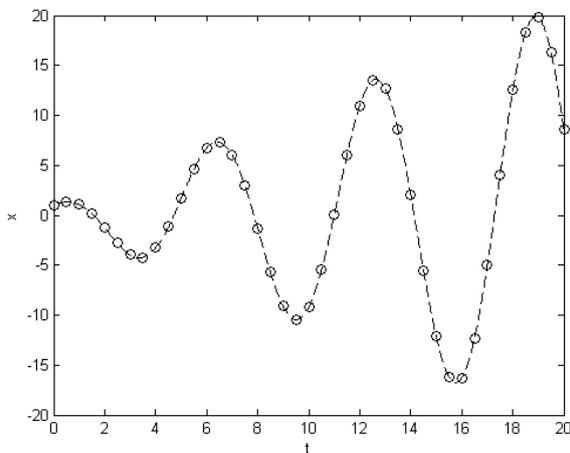
$$y(t) = (a + bt) \sin(t). \tag{20}$$

Dengan mengambil langkah sebesar $h = 0.5$, waktu akhir $T = 20$, dan nilai $a = b = 1$, diperoleh data trajektori seperti yang diberikan pada Gambar 2. Pada gambar tersebut, bulat kosong merepresentasikan posisi objek yang tercatat oleh kamera, sedangkan garis putus-putus menyatakan trajektori yang terputus atau tidak tersedia dalam suatu selang waktu.

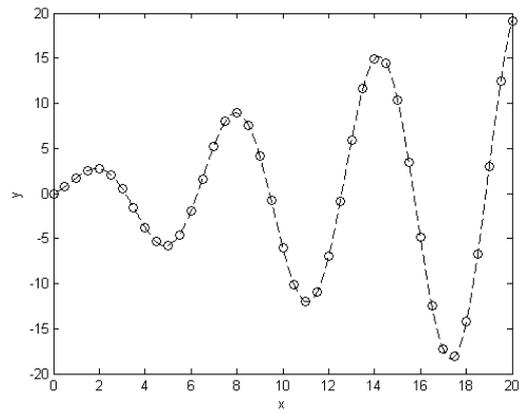


Gambar 2. Trajektori berbentuk spiral Archimedean

Apabila data trajektori pada Gambar 2 dipecah atas komponen x dan y , maka akan diperoleh masing-masing Gambar 3 dan 4. Keterangan untuk bulat kosong dan garis putus-putus pada Gambar 3 dan 4 sama dengan keterangan pada Gambar 2.



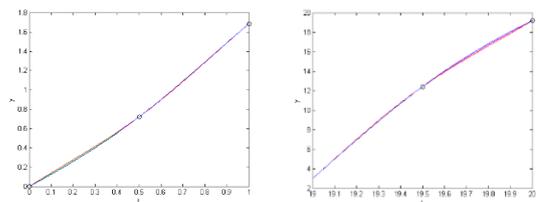
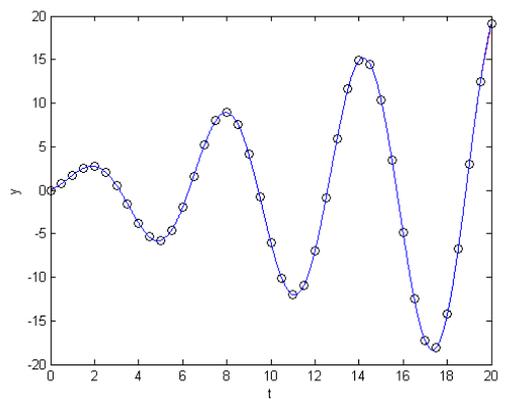
Gambar 3. Komponen x pada data trajektori spiral Archimedean



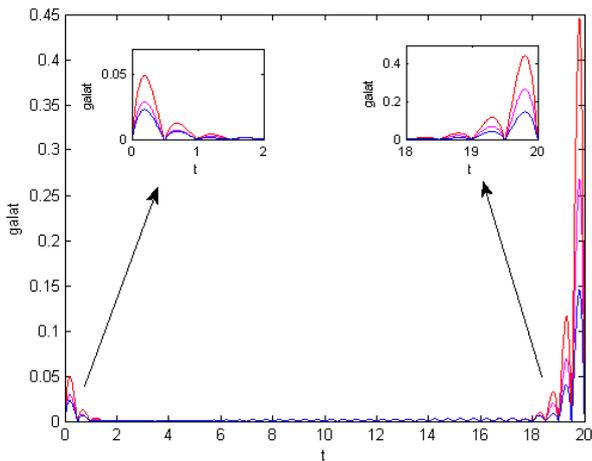
Gambar 4. Komponen y pada data trajektori spiral Archimedean

Di sini data trajektori untuk komponen x dan y , seperti yang diplot pada Gambar 3 dan 4, akan diinterpolasi dengan menggunakan metode splin kubik. Hasil interpolasi kedua komponen x dan y tersebut akan digabung ke dalam bidang- xy untuk memperoleh interpolasi terhadap data trajektori pada Gambar 2. Dalam hal ini digunakan jenis syarat batas alami, terapit orde 1, dan terapit orde 2, dimana masing-masingnya akan dibandingkan keakuratannya terhadap kurva spiral Archimedean yang diberikan oleh Persamaan (19) dan (20).

Hasil interpolasi splin kubik terhadap data trajektori untuk komponen x dan y diberikan masing-masing pada Gambar 5 dan 6. Kurva magenta, merah dan biru masing-masing menyatakan splin kubik alami, terapit orde 1 dan terapit orde 2. Dari kedua gambar tersebut dapat dilihat perbedaan antara hasil interpolasi yang diperoleh. Hasil gabungan kedua interpolasi dalam bidang- xy dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 5. Hasil interpolasi splin kubik untuk komponen x data trajektori pada Gambar 3. Perbesaran gambar di sekitar titik ujung kiri dan kanan diberikan oleh plot kecil di kiri dan kanan bawah.

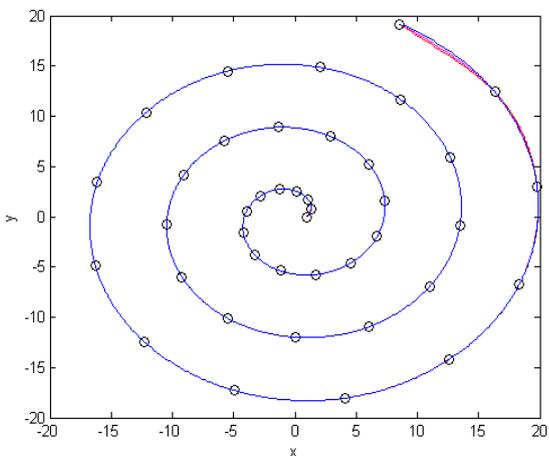


Gambar 6. Hasil interpolasi splin kubik untuk komponen y data trajektori pada Gambar 4. Perbesaran gambar di sekitar titik ujung kiri dan kanan diberikan oleh plot kecil di kiri dan kanan bawah.

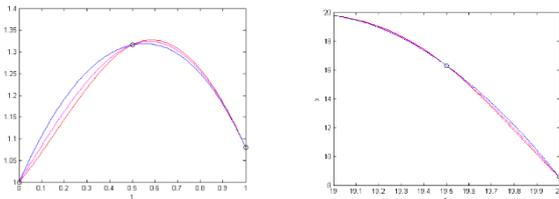
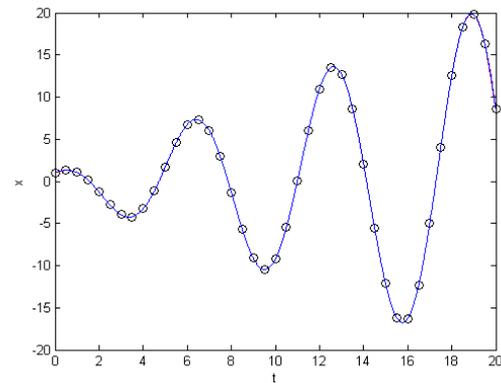
Untuk melihat lebih detail perbandingan keakuratan splin kubik alami, terapit orde 1 dan orde 2 masing-masing terhadap kurva trajektori spiral Archimedean pada Persamaan (1), definisikan galat untuk setiap jenis splin kubik sebagai fungsi terhadap t sebagai berikut:

$$E_i(t) = \sqrt{(x(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (y(t) - \tilde{y}_i(t))^2}, \quad (21)$$

dimana \tilde{x}_i dan \tilde{y}_i menyatakan polinomial interpolasi splin kubik untuk jenis alami ($i = 1$), splin terapit orde 1 ($i = 2$), dan splin terapit orde 2 ($i = 3$). Plot galat diberikan pada Gambar 8 dengan warna magenta, merah dan biru masing-masing merepresentasikan galat splin kubik alami, terapit orde 1 dan terapit orde 2. Dari gambar dapat dilihat bahwa splin kubik terapit orde 2 memberikan galat yang lebih kecil dari dua splin lainnya.



Gambar 7. Hasil interpolasi splin kubik untuk data trajektori pada Gambar 2



Gambar 8. Galat hasil interpolasi splin kubik alami, terapit orde 1 dan terapit orde 2 masing-masing terhadap kurva trajektori spiral Archimedean pada Persamaan (1).

Karena t merupakan variabel kontinu, maka akumulasi galat untuk setiap jenis splin kubik dapat didefinisikan sebagai integral berikut:

$$E_i^{tot} = \int_0^{20} E_i(t) dt. \quad (22)$$

Perhitungan numerik dari integral (22) memberikan nilai galat total untuk setiap jenis splin kubik (lihat Tabel 1).

Tabel 1. Galat Total Untuk Setiap Jenis Splin Kubik

Jenis Splin Kubik	Galat total (E_i^{tot})
Splin kubik alami ($i = 1$)	0,14290
Splin kubik terapit orde 1 ($i = 2$)	0,22614
Splin kubik terapit orde 2 ($i = 3$)	0,09007

Berdasarkan hasil analisis galat di atas, diperoleh kesimpulan bahwa splin kubik terapit orde 2 lebih akurat dalam melacak trajektori objek berbentuk kurva spiral Archimedean dibandingkan dengan splin kubik alami dan splin kubik terapit orde 1.

4. KESIMPULAN

Pada artikel ini telah dibahas pengembangan metode interpolasi splin kubik terapit dimana kemiringan di titik-titik ujung diaproksimasi oleh rumus beda hingga dengan ketelitian orde lebih tinggi. Secara khusus telah diturunkan formulasi untuk splin kubik terapit orde dua. Metode interpolasi splin kubik ini kemudian diterapkan pada masalah pelacakan trajektori objek (*object tracking*).

Sebagai contoh ilustrasi, data trajektori yang akan diinterpolasi dibangkitkan dari kurva spiral Archimedean, kemudian dibandingkan hasil interpolasi yang diperoleh antara splin kubik alami, terapit orde satu dan terapit orde dua. Nilai galat total untuk ketiga jenis splin kubik tersebut secara berturut-turut adalah $E_1^{\text{tot}} = 0,14290$, $E_2^{\text{tot}} = 0,22614$ dan $E_3^{\text{tot}} = 0,09007$. Berdasarkan hasil tersebut disimpulkan bahwa interpolasi splin kubik terapit orde dua yang dikembangkan dalam artikel ini dapat menghasilkan trajektori objek yang lebih akurat dibandingkan jenis splin kubik yang lain.

Pengembangan interpolasi splin kubik terapit ini dapat dilanjutkan secara umum untuk orde- m . Investigasi keakuratan interpolasi splin kubik terapit dengan orde ketelitian yang semakin tinggi juga menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hal yang sangat penting juga untuk diperhatikan adalah analisis kriteria kurva trajektori terhadap konvergensi nilai galat total ketika orde splin kubik terapit dibuat semakin tinggi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini dibiayai dari hibah penelitian PDP (Ref No.131 / SP2H / LT-MONO / LL4 / 2020, 025.3 / TEDC / MOU-DIR / IV / 2020) oleh Kementerian Riset dan Teknologi Badan Riset dan Inovasi (RISTEK-BRIN), Republik Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- AMELIA, V., SYAFWAN, M., dan PUTRI, A.R., 2018. Interpolasi Splin Kubik Terapit. *Jurnal Matematika Unand*, 8(2), pp. 141-148.
- AMLIZA, W., SYAFWAN, M., dan BAHRI, S., 2021. Interpolasi Splin Kubik Periodik. *Jurnal Matematika Unand*, 10(1), pp. 1-10.
- ANTON, H. dan RORRES, C., 2013. *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. Edisi ke-11. New York: Wiley.
- CHAPRA, S.C. dan RAYMOND, P.C., 2010. *Numerical Methods for Engineers*. Edisi ke-7. New York: McGraw-Hill.
- CHUANLONG, W.U., SONG, S., dan WANG, D., 2017. The Application of Cubic Spline Interpolation for the Leo Satellite. *GNSS World of China*, 42(1), pp. 108-110.
- DYER, S.A. dan DYER, J.S., 2001a. Cubic-spline interpolation: part 1. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 4(1), pp. 44-46.
- DYER, S.A. dan HE, X., 2001b. Cubic-spline interpolation: part 2. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 4(2), pp. 34-36.
- FERRER-ARNAU, L., REIG-BOLANO, R., MARTI-PUIG, P., MANJABACAS, A., dan PARISI-BARADAD, V., 2013. Efficient cubic spline interpolation implemented with FIR filters. *International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications*, 5, pp. 098-105.
- GU, Y., dan TIAHJADI, T., 1999. Efficient planar object tracking and parameter estimation using compactly represented cubic B-spline curves. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 29(4), pp. 358-367.
- KHAN, I. dan OHBA, R., 1999. Closed form expressions for the finite difference approximations of first and higher derivatives based on Taylor series. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 107, pp.179-193.
- MATHEWS, J.H. dan FINK, K.D., 2004. *Numerical Methods Using MATLAB Fourth Edition*. New Jersey: Prentice-Hall.
- SAMPENA, S., 2011. *Interpolasi Splin Kubik Pada Trajektori Manusia*. <<https://docplayer.info/44017348-Interpolasi-spline-kubik-pada-trajektori-manusia.html>> [diakses 10 Desember 2020]
- SYAFWAN, E., -, E., -, N., dan Syafwan, M., 2020. The Application of Tridiagonal Matrix Algorithm in Cubic Spline Interpolation. *Jurnal Ipteks Terapan*, 14(3), pp. 205–210.
- UTAMININGRUM, F., FAUZI, A., SYAUQY, D., CAHYA, R., dan HAPSANI, A.G., 2017. Determining direction of moving object using object tracking for smart wheelchair controller. *5th International Symposium on Computational and Business Intelligence (ISCBI)*, 11-14 Aug. 2017. Dubai, United Arab Emirates, pp. 6-9.
- PRASAD, A., MANMOHAN, A., SHANMUGAM, P. K., dan D.P., K. 2018. Application of Cubic Spline Interpolation Technique in Power Systems: A Review. Dalam: Y.K. Truong, ed. 2018. *Topics in Splines and Applications*. London: IntechOpen, pp. 129-147.
- WANG, L., HSIEH, W. dan TRUONG, T., 2004. A fast computation of 2-D cubic-spline interpolation. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(9), pp. 768-771.

Halaman ini sengaja dikosongkan